



**Modelamiento matemático y simulación
computacional de dinámica poblacional con
competición de especies**

Autor: José Carlos Rubianes Silva

Institución: Universidad Estadual de Campinas - Unicamp

Otros autores: Denis Cajas Guaca (Universidad estadual de Campinas)

Resumen

Describir la influencia de la evolución de un material impactante en la Bahía de Buenaventura, en la competición entre dos especies de peces. Así, disponer de un modelo que refleje la dinámica poblacional y se torne fundamental para la gestión eficaz de los recursos naturales de la bahía. Los resultados de las simulaciones son concluyentes, y reflejan la necesidad de medidas de mitigación ambiental que tengan por finalidad evitar o disminuir los efectos adversos causados por el vertedero de aguas residuales domesticas en la bahía.

Será usado un sistema no lineal clásico del tipo Lotka-Volterra para modelar este problema, con condiciones de contorno de Neumann. La resolución numérica es obtenida usando el método de diferencias finitas con salidas gráficas cualitativas.

Palabras clave: Método de Diferencias Finitas, Ecuación de Difusión-Advección, Simulación Computacional, Material Impactante, Dinámica Poblacional, Ecología Matemática.

1. Introducción

El escenario donde se realizarán las simulaciones de esta investigación es la bahía de Buenaventura en el Valle del Cauca en el suroccidente de Colombia (véase Figura 1), donde ya existe una investigación previa (ver CAJAS Y MEYER, 2014), la cual describe que una de las fuentes principales de contaminación es por aguas residuales domésticas; de donde se utilizan los resultados numéricos de la concentración de contaminantes. En la bahía hay muchos estudios llevados a cabo en la región, que revelan una riqueza de la biodiversidad y la presencia de varias especies de flora y fauna; y en lo que se refiere al hábitat de especies de peces exóticas y nativas identificadas en la cadena trófica constituyen un escenario probable a la ocurrencia de un posible impacto ambiental, especialmente por las descargas continuas de agentes contaminadores. Por lo tanto, en términos de política pública, es importante poder contar con una herramienta algorítmica para simular la situación en el corto, mediano y largo plazo con miras a establecer una gestión más adecuada de este ambiente.



Figura 1: Bahía de Buenaventura

El instrumento matemático es una herramienta importante para el estudio de los problemas de impacto ambiental, la investigación realizadas en CAJAS Y MEYER (2014), es el primero en la obtención de resultados de simulaciones de contaminación en la bahía. En esta investigación, estos resultados serán utilizados para estudiar la interacción de dos especies de peces bajo el efecto de este contaminante (aguas residuales).

Llamamos aguas residuales a las aguas que resultan después de haber sido utilizadas en nuestros domicilios, en las fábricas, en actividades ganaderas, etc.

Las aguas residuales aparecen sucias y contaminadas: llevan grasas, detergentes, materia orgánica, residuos de la industria y de los ganados, herbicidas, plaguicidas, y en ocasiones algunas sustancias muy tóxicas.

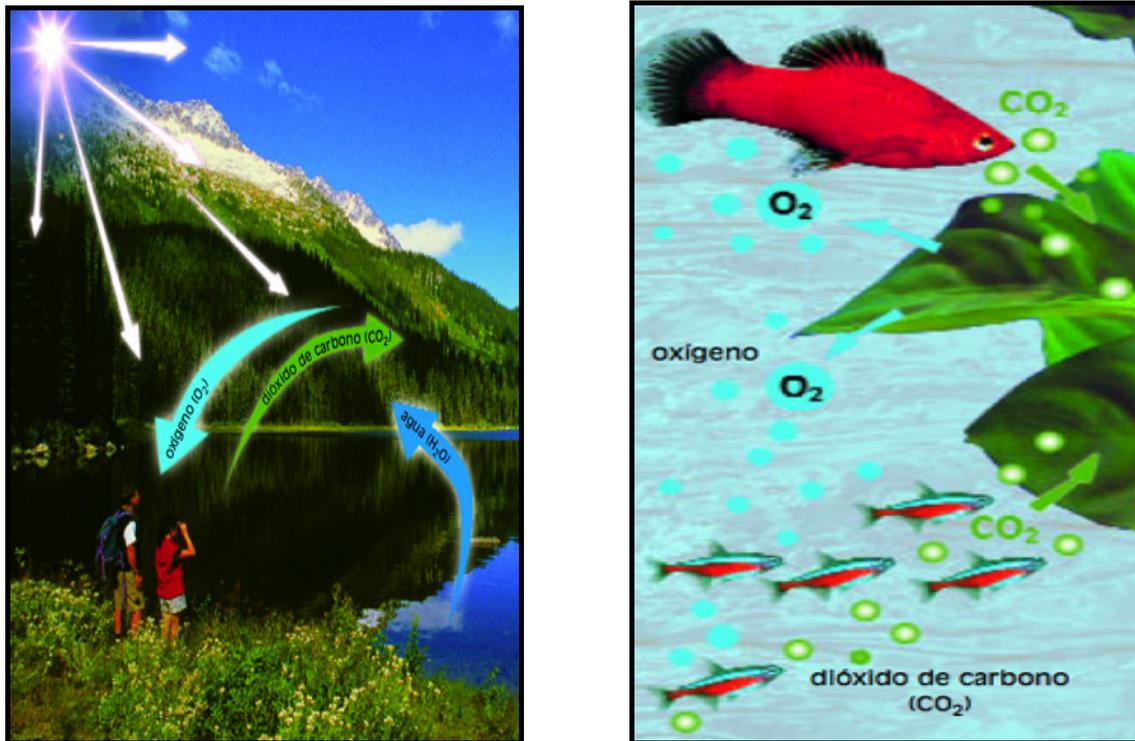


Figura 2: En el proceso de la fotosíntesis se produce oxígeno.

Además, cuando las aguas residuales domesticas son vertidas en el agua o cuando detergentes, fertilizantes llegan a ella, el exceso de minerales provoca la proliferación de las algas microscópicas que viven próximas a la superficie. Por lo tanto, se forma una capa de algas de algunos centímetros de espesor, que impide la penetración de la luz en el agua y la realización de la fotosíntesis en las capas más profundas. Cuando las algas debajo de la superficie mueren, su gran cantidad favorece el aumento de bacterias descompositoras, que van a consumir demasiado oxígeno para llevar a cabo la descomposición; por lo que comienza a faltar oxígeno en el agua, entonces los peces y otros organismos aeróbicos mueren (el oxígeno producido por las algas de la superficie escapa casi todo al aire, en lugar de disolverse en el agua). Con la falta de oxígeno, la descomposición de la materia orgánica (antes aeróbica), se convierte en anaeróbica, que conduce a la producción de gases tóxicos tales como sulfuro de hidrógeno, que intoxican y destruyen la flora y fauna acuática.



Figura 3: Fuente <http://noticias.bol.uol.com.br/fotos/imagens-do-dia/2014/06/26/>

La depleción de oxígeno en los cuerpos de agua, resultante de la degradación de materia orgánica presente en aguas residuales domésticas, representa un efecto negativo de gran importancia, especialmente para la preservación de la vida en estos ambientes. La situación es modelada con un sistema de EDPs (Ecuaciones diferenciales parciales) donde se desarrolla un algoritmo de aproximación con diferencias finitas, de las cuales obtendremos las simulaciones.



Figura 4: Fuente <http://g1.globo.com/sp/piracicaba-regiao/noticia/2014/02/baixa-oxigenacao>

2. El modelo matemático

El modelamiento de este problema depende de muchos factores, pero en principio, los principales son: el tipo de competición y la rapidez de recuperación de las especies implicadas. El problema de competición que consideraremos, es por espacio, oxígeno y nutrientes. Para el modelamiento tenemos los siguientes fenómenos:

- La dispersión de la población de cada especie;
- La migración de cada especie;
- El decaimiento de las especies debido a la presencia de un material impactante tóxico;
- Relaciones intra e inter específicas.

Teniendo en cuenta los modelos clásicos, por ejemplo EDELSTEIN-KESHET (1987); MURRAY (1989); y considerando dos poblaciones que interactúan entre sí, el sistema no-lineal que describe este fenómeno para las densidades poblacionales P_1 e P_2 viene dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) + U \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}, \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + \rho \mu_1 P_1 = \lambda_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K_1} \right) - \sigma_1 P_1 P_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) + V \left(\frac{\partial P_2}{\partial x}, \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) + \rho \mu_2 P_2 = \lambda_2 P_2 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K_2} \right) - \sigma_2 P_1 P_2 \end{cases} \quad (1)$$

Com parâmetros:

α_1 y α_2 (constantes) que representan los coeficientes de dispersión poblacional de cada especie.

$U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ son los campos de velocidades constantes.

λ_1 y λ_2 representan las tasas de natalidad de cada especie.

ρ representa la concentración del contaminante en el medio acuático.

μ_1 y μ_2 representan los decaimientos poblacionales de cada especie debido a la mortalidad causada por la presencia del contaminante;

σ_1 y σ_2 representan las tasas de relación inter-específica.

K_1 y K_2 representan las capacidades de soporte del medio para las dos especies.

3. Discretización del modelo

Se considera como dominio de las funciones densidades P_1 e P_2 , la superficie de la bahía, constituyendo un conjunto abierto, no vacío, acotado y de frontera suficientemente regular. Denotamos este dominio como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se opta por un dominio bidimensional en función de las dimensiones de la bahía. Se denotará por $P_1(x, y, t)$, $P_2(x, y, t)$ las densidades poblacionales de las especies en el instante $t \in I = (0, t]$ y en el punto $(x, y) \in \Omega$.

3.1 Discretización espacial

Para realizar el tratamiento matemático en ambos sistemas de la ecuación (1), utilizamos el método de diferencias finitas centradas de 2^a orden para las variables espaciales, ver CUNHA (1993); LEVEQUE (2007). Por lo tanto, tenemos

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{P_{i-1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{P_{i,j-1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{\Delta y} \quad (5)$$

3.2 Discretización temporal: método de Crank-Nicolson

Para desarrollar la parte temporal, utilizamos el método de Crank-Nicolson, esto es, usando las aproximaciones:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x_i, y_j, t_{n+\Delta t/2}) \approx \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (6)$$

$$P(x_i, y_j, t_{n+\Delta t/2}) \approx \frac{P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j}^n}{2} \quad (7)$$

3.3 Puntos Interiores

Usando las aproximaciones dadas por las ecuaciones (2-5), (6) e (7), llevadas en la ecuación (1), se obtienen dos esquemas, el primero es dado por:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-\alpha_1 \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{1,t+1,j}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{u_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{1,t,j+1}^{n+1} + \\
 & + \left[1 + \frac{\alpha_1 \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_1 \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_1 \Delta t}{2} + \mu_1 \Delta t \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j}^n}{4}\right) + \alpha_1 \Delta t \left(\frac{P_{1,t,j}^{n+1} + P_{1,t,j}^n}{4}\right) + \right. \\
 & \left. + b_1 \Delta t \left(\frac{P_{2,t,j}^{n+1} + P_{2,t,j}^n}{4}\right)\right] P_{1,t,j}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{u_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{1,t,j-1}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_1 \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{1,t-1,j}^{n+1} \\
 & = \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{1,t+1,j}^n + \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{u_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{1,t,j+1}^n + \\
 & + \left[1 - \frac{\alpha_1 \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_1 \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_1 \Delta t}{2} - \mu_1 \Delta t \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j}^n}{4}\right) - \alpha_1 \Delta t \left(\frac{P_{1,t,j}^{n+1} + P_{1,t,j}^n}{4}\right) \right. \\
 & \left. - b_1 \Delta t \left(\frac{P_{2,t,j}^{n+1} + P_{2,t,j}^n}{4}\right)\right] P_{1,t,j}^n + \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{u_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{1,t,j-1}^n + \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{1,t-1,j}^n
 \end{aligned}$$

y el segundo esquema es dado por:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-\alpha_2 \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{2,t+1,j}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{2,t,j+1}^{n+1} + \\
 & + \left[1 + \frac{\alpha_2 \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_2 \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_2 \Delta t}{2} + \mu_2 \Delta t \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j}^n}{4}\right) + \alpha_2 \Delta t \left(\frac{P_{2,t,j}^{n+1} + P_{2,t,j}^n}{4}\right) + \right. \\
 & \left. + b_2 \Delta t \left(\frac{P_{1,t,j}^{n+1} + P_{1,t,j}^n}{4}\right)\right] P_{2,t,j}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{2,t,j-1}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_2 \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{2,t-1,j}^{n+1} \\
 & = \left(\frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{v_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{2,t+1,j}^n + \left(\frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{2,t,j+1}^n + \\
 & + \left[1 - \frac{\alpha_2 \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_2 \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_2 \Delta t}{2} - \mu_2 \Delta t \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j}^n}{4}\right) - \alpha_2 \Delta t \left(\frac{P_{2,t,j}^{n+1} + P_{2,t,j}^n}{4}\right) \right. \\
 & \left. - b_2 \Delta t \left(\frac{P_{1,t,j}^{n+1} + P_{1,t,j}^n}{4}\right)\right] P_{2,t,j}^n + \left(\frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v_2 \Delta t}{4\Delta y}\right) P_{2,t,j-1}^n + \left(\frac{\alpha_2 \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{v_1 \Delta t}{4\Delta x}\right) P_{2,t-1,j}^n
 \end{aligned}$$

donde, $a_1 = \frac{\lambda_1}{k_1}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{k_2}$, $b_1 = \frac{\lambda_1}{k_1} + \sigma_1$ e $b_2 = \frac{\lambda_2}{k_2} + \sigma_2$.

Así, obtenemos los sistemas:

$$\begin{aligned}
 A(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^{n+1}, c^n, c^{n+1})P_1^{n+1} - B(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^{n+1}, c^n, c^{n+1})P_1^n \\
 C(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^{n+1}, c^n, c^{n+1})P_2^{n+1} = D(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^{n+1}, c^n, c^{n+1})P_2^n
 \end{aligned} \quad (8)$$

Como consecuencia de la aparición de términos variables en las matrices de sistema (que son sobrescritos a cada iteración temporal), se realizarán dos iteraciones internas en cada paso en el tiempo, caracterizándose así un método Predictor-corrector que tiende a una aproximación de orden de $(\Delta t)^2$ conforme aumentan las iteraciones (ver MEYER 1988).

El proceso se realiza de la siguiente manera:

Se obtienen $P_1^{(s)}$ y $P_2^{(s)}$ a partir de

$$\begin{aligned}
 A(P_1^n, P_1^n, P_2^n, P_2^n, c^n, c^{n+1})P_1^s = B(P_1^n, P_1^n, P_2^n, P_2^n, c^n, c^{n+1})P_1^n \\
 C(P_1^n, P_1^n, P_2^n, P_2^n, c^n, c^{n+1})P_2^s = D(P_1^n, P_1^n, P_2^n, P_2^n, c^n, c^{n+1})P_2^n,
 \end{aligned} \quad (9)$$

después se obtienen $P_1^{(n+1)}$ y $P_2^{(n+1)}$ a partir de

$$\begin{aligned}
 A(P_1^n, P_1^s, P_2^n, P_2^s, c^n, c^{n+1})P_1^{n+1} = B(P_1^n, P_1^s, P_2^n, P_2^s, c^n, c^{n+1})P_1^s \\
 C(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^s, c^n, c^{n+1})P_2^{n+1} = D(P_1^n, P_1^{n+1}, P_2^n, P_2^s, c^n, c^{n+1})P_2^s
 \end{aligned} \quad (10)$$

3.4. Condiciones de Contorno

Las condiciones de contorno a este problema están dadas por las condiciones de Von Neumann homogéneas:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (11)$$

Teniendo en cuenta la geometría de la malla adoptada, todas las fronteras son horizontales, donde $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \mp \frac{\partial P}{\partial y}$ o verticales, donde $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \mp \frac{\partial P}{\partial x}$.

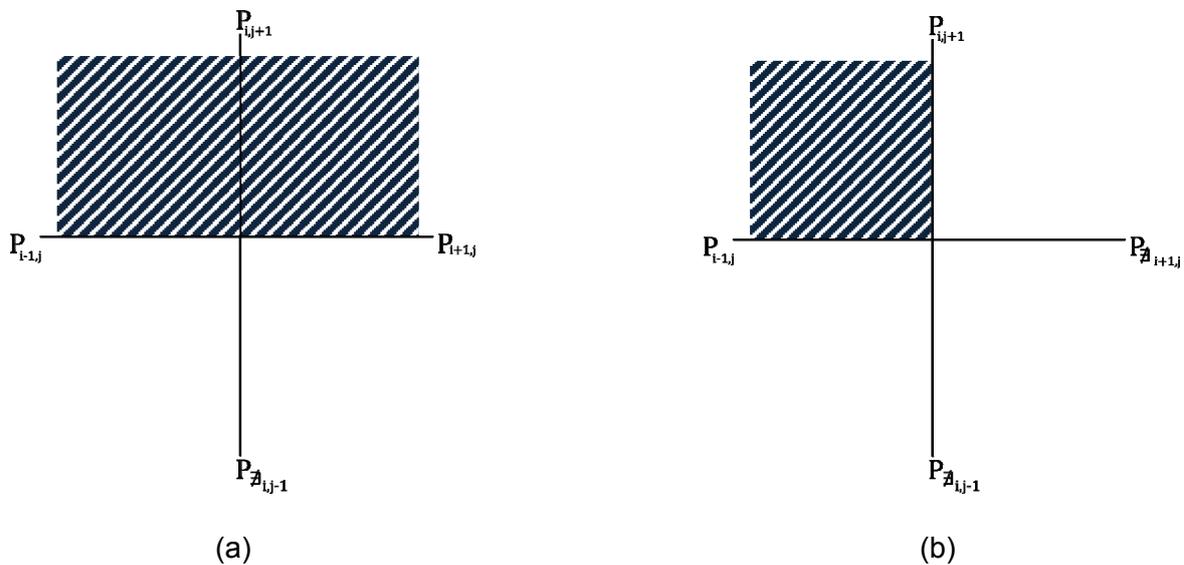


Figura 5: Ejemplos de tipos de fronteras.

En la frontera horizontal, suponiendo que el dominio este encima del segmento como se muestra en la Figura 5.a, la ecuación (5) requiere el punto que está abajo, que no pertenece al dominio, para esto consideramos un punto virtual, denominado $P_{i,j-1}^n$. Sin embargo, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ en la discretización adoptada es aproximada por

$$\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = 0, \quad (12)$$

esto proporciona para $P_{i,j-1}^n$ el valor de $P_{i,j-1}^n = P_{i,j+1}^n$.

El procedimiento es totalmente análogo en el caso que el dominio este debajo de ese segmento, o a la izquierda, o hacia la derecha.

Tenemos un total de ocho tipos de fronteras, de las cuales dos son verticales, dos son horizontales y las otras cuatro son esquinas del dominio Ω (véase la Figura 5.b). Aquí el procedimiento es similar al anterior, con la diferencia que se hace uso virtual de dos puntos externos y no sólo de uno, como en el caso de los contornos, sólo verticales u horizontales.

4. Simulaciones y resultados

Se realizaron algunos experimentos computacionales para tres escenarios, a fin de observar la relación entre las dos especies. Algunos parámetros se estimaron para probar el modelo (véase la Tabla 1).

En las simulaciones, las densidades poblacionales iniciales $P_{1,0}$ e $P_{2,0}$ de las dos especies serán distribuidas homogéneamente en todo el dominio respetando las condiciones de contorno y asumiendo los valores puntuales iguales a 1. En esta investigación, los algoritmos han sido programados en Matlab y el tiempo en cada escenario es de 48 horas.

Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
α_1	10^{-3}	α_2	10^{-3}
u_1	-4×10^{-3}	v_1	-4×10^{-3}
u_2	10^{-5}	v_2	10^{-5}
μ_1	0.05	μ_2	0.035
λ_1	0.03	λ_2	0.04
σ_1	2×10^{-4}	σ_2	10^{-4}
K_1	20	K_2	15

Tabla 1: Parámetros utilizados en las simulaciones de la dispersión de contaminantes en la bahía y su efecto sobre la convivencia de dos especies competidoras P1 y P2.

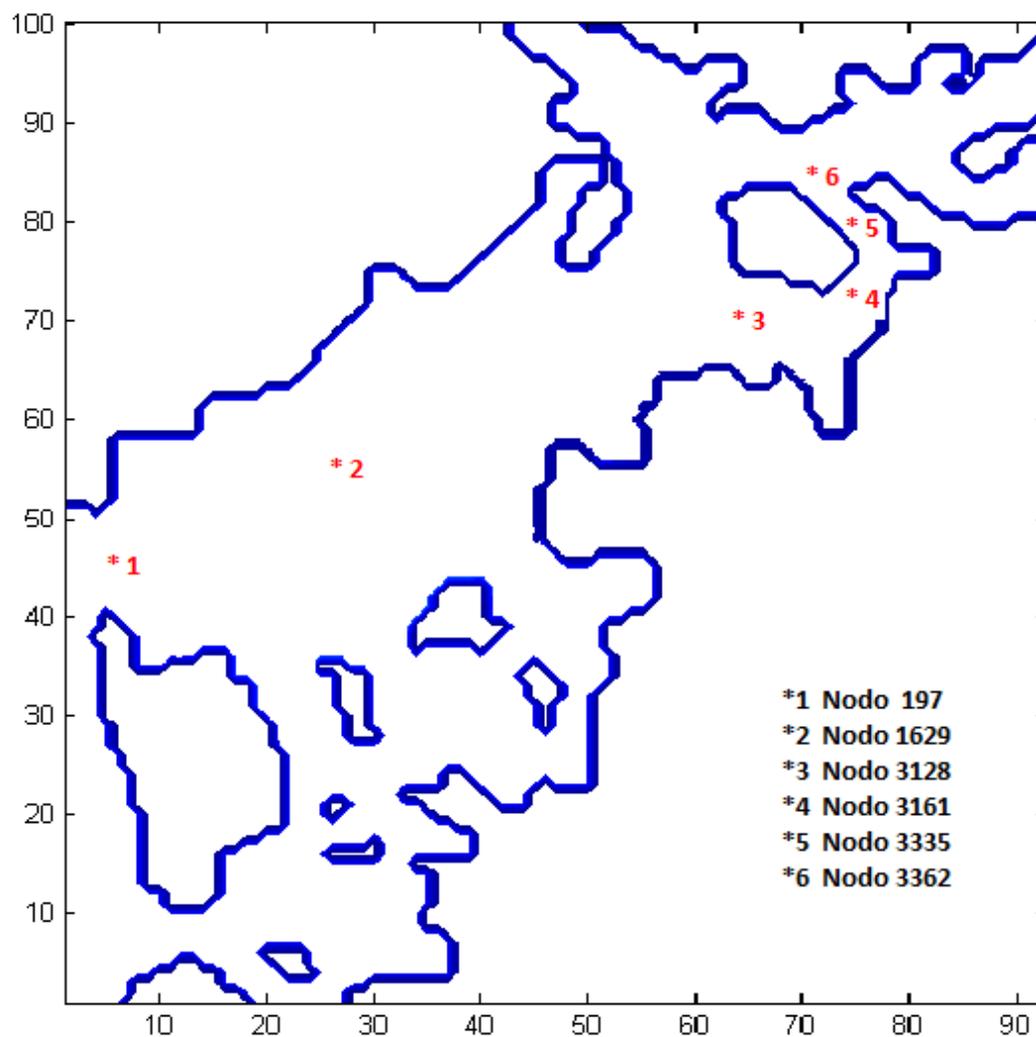


Figura 6: Ubicación en la bahía de los seis nodos utilizados en las simulaciones.

De la Figura 6, los nodos que están más próximos a las fuentes de contaminación son, nodo 3161, nodo 3335 y el nodo 3362. Los que están más alejados de las fuentes son, nodo 3128, nodo 1629 y el nodo 197.

4.1 Escenario 1

Para esta simulación se considera el viento Suroeste $v = 1,41$ km/h el cual, según la rosa de los vientos de la ciudad, es el más frecuente en la bahía con un porcentaje de 32%. Aquí, los vientos son tomados con referencia en el aeropuerto de la ciudad a una altura de 10 m, luego el valor del viento en la superficie (al nivel del mar) es el 3% de este valor (ver OLIVEIRA 2003).

Cabe resaltar, que la solución numérica usada aquí para la concentración de contaminación por aguas residuales es importante para poder simular la dinámica poblacional de las dos especies de peces; y esta es obtenida de la Tesis de Maestría de Denis Cajas Guaca (ver CAJAS Y MEYER 2014).

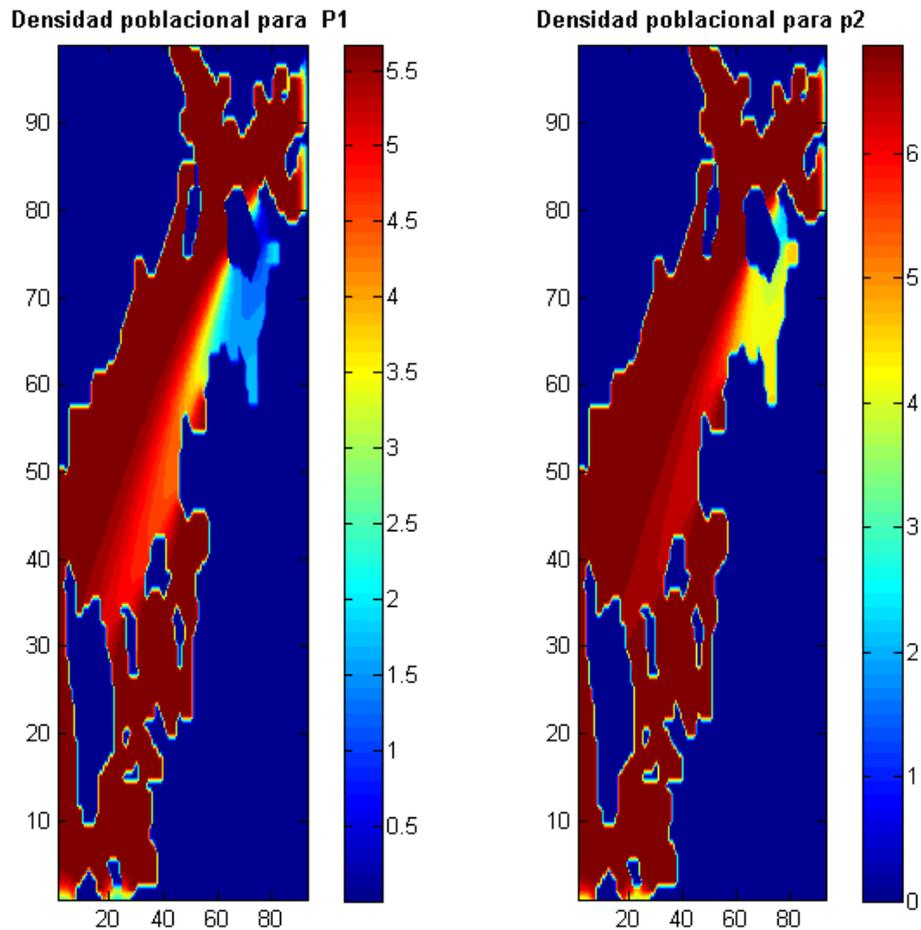


Figura 7: Distribución de las densidades poblacionales de las especies P_1 y P_2 para el escenario con viento Suroeste en la bahía.

En la Figura 7, la barra a la derecha determina la densidad poblacional de cada especie, la cual va desde el color azul que significa que la densidad poblacional es cero, hasta el color rojo intenso, significando este la máxima densidad poblacional de cada especie.

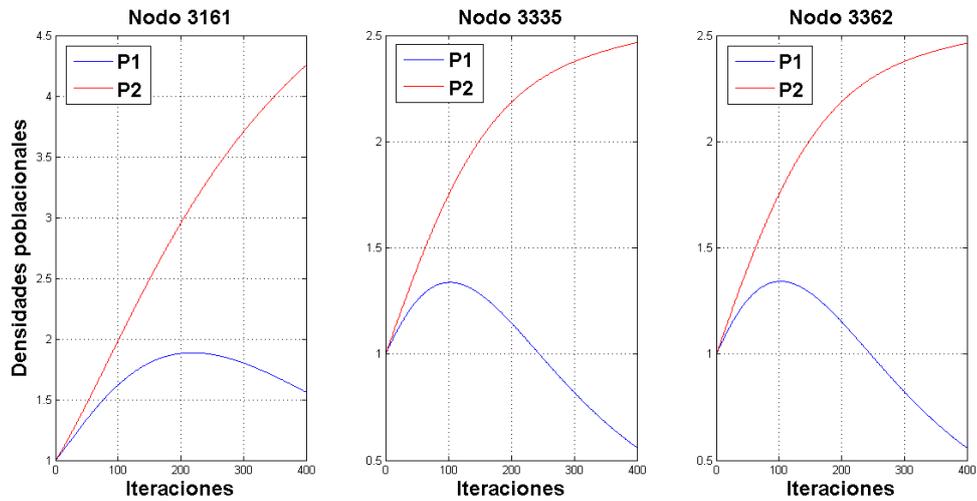


Figura 8: Monitoreo del comportamiento evolutivo de las densidades poblacionales en tres puntos fuentes de contaminación con viento Suroeste.

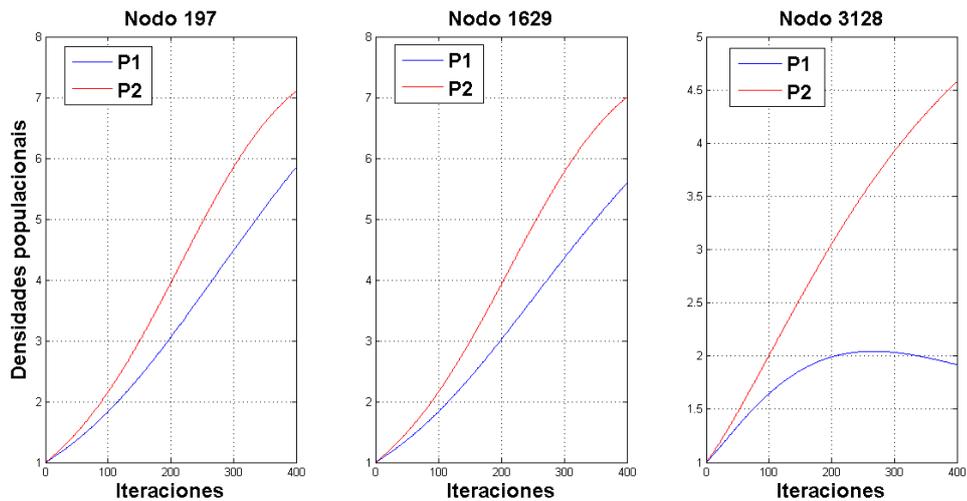


Figura 9: Monitoreo del comportamiento evolutivo de las densidades poblacionales de las dos especies para distintos nodos del dominio con viento Suroeste.

En la Figura 7, se observan las densidades poblacionales en la bahía y cómo las dos especies sufren los daños causados por la presencia del contaminante. En la figura 7, se ubican seis nodos en la bahía que serán utilizadas en las simulaciones de las demás Figuras. En la Figura 8, se eligieron nodos cerca de tres fuentes puntuales de contaminante con el fin de observar el comportamiento evolutivo de las densidades poblacionales de ambas especies, se puede ver que la especie P_1 comienza a sufrir más los daños que la especie P_2 , resultado numérico influenciado por la diferencia entre los parámetros μ_1 y μ_2 , que indican los decaimientos de las densidades poblacionales de las dos especies respectivamente. En la Figura 9, tres nodos de la bahía distantes a las fuentes contaminantes, fueron elegidos para acompañar el comportamiento

evolutivo en estos nodos (siendo el más distante el nodo 1 y el más próximo a las fuentes el nodo 6), se observa que la especie P_1 aumenta su densidad poblacional cuando disminuye la concentración de contaminantes, esto es debido a la capacidad de soporte del medio de ambas especies.

4.2 Escenario 2

Para esta simulación se considera el viento Sur $v = 0.2$ km/h el cual, según la rosa de los vientos de la ciudad, es el segundo más frecuente en la bahía, con un porcentaje de 17%.

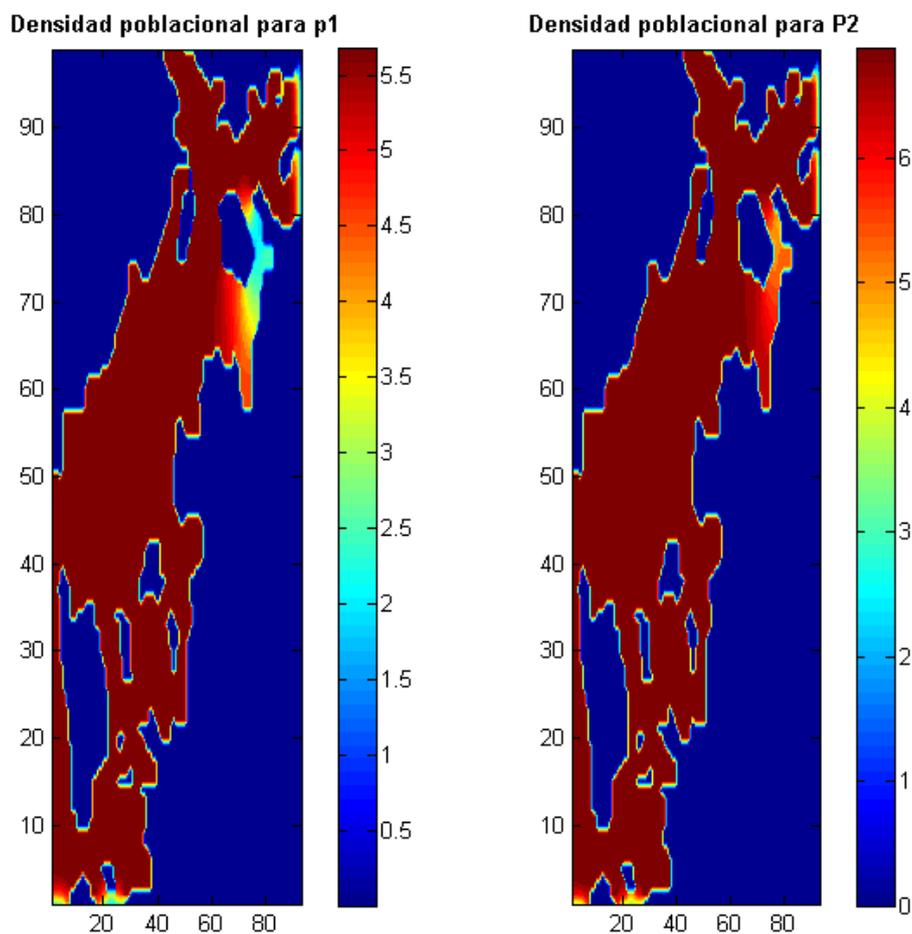


Figura 10: Distribución de las densidades poblacionales P_1 y P_2 en la bahía para el escenario con viento Sur.

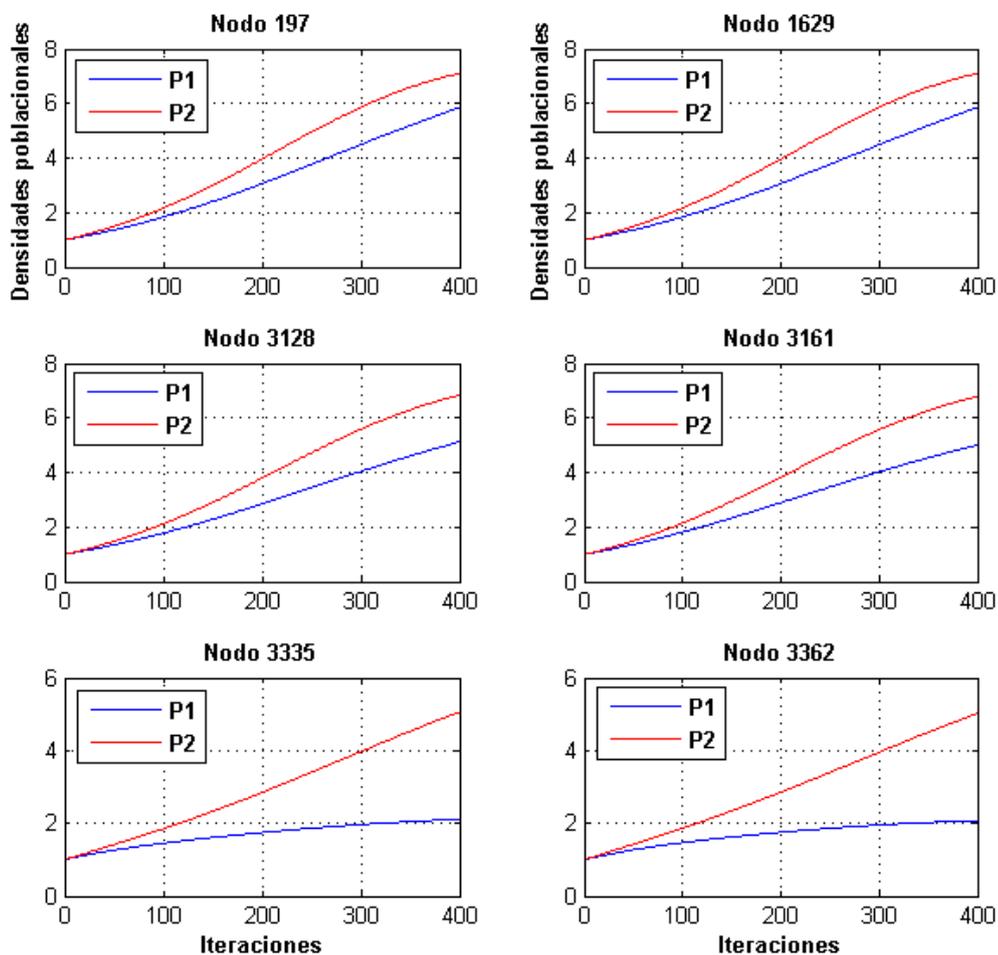


Figura 11: Monitoreo del comportamiento evolutivo de las densidades poblacionales con viento Sur.

Se debe notar, que la competición entre ambas especies sucede solo en aquellas partes de la bahía donde hay contaminación por aguas residuales domesticas; así, fuera del alcance del contaminante, no existe tal competición para nuestro estudio.

Debido a la geomorfología de la bahía, la menor concentración de contaminante ocurre en el escenario 2, esto es cuando simulamos solo con viento Sur (ver Figura 10), y la mayor concentración de contaminante es obtenida durante la simulación del viento Suroeste (ver Figura 7).

4.3 Escenario 3

Para esta simulación se considera el viento Oeste $v = 0.3165$ km/h el cual, según la rosa de los vientos de la ciudad es el tercer más frecuente en la bahía con un porcentaje de 13%.

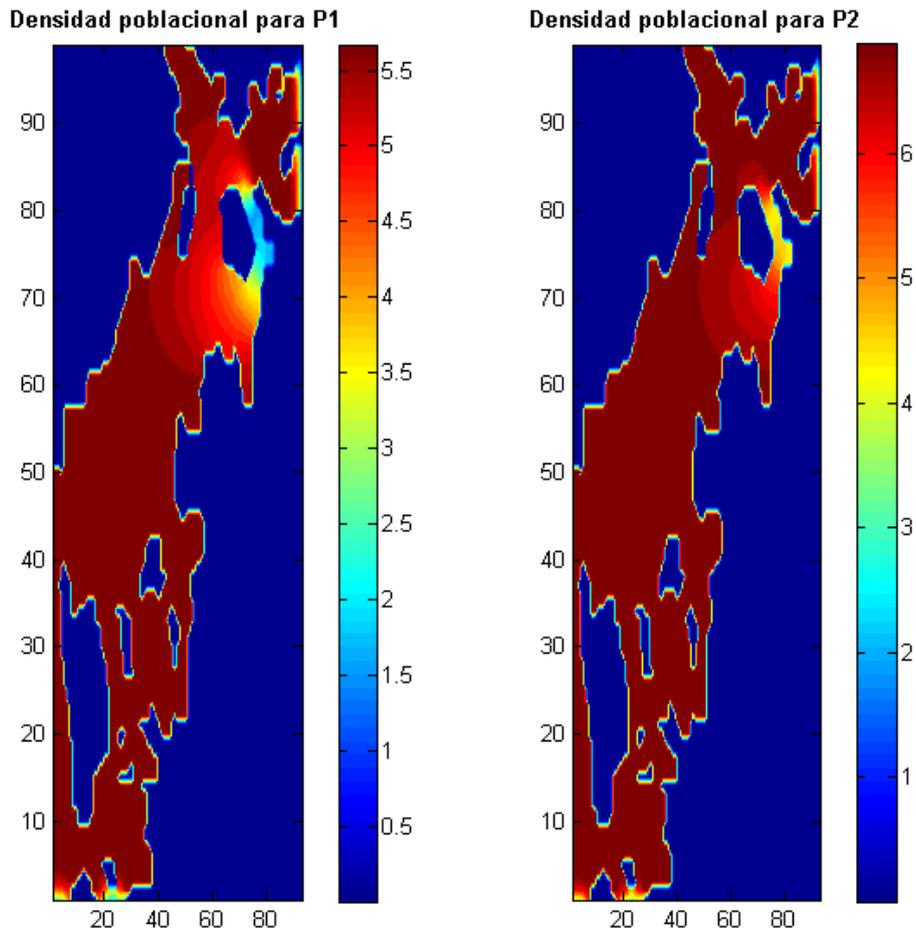


Figura 12: Distribución de las densidades poblacionales P_1 y P_2 en la bahía para el escenario con viento Oeste.

De las Figuras 11 y 13, se observa una mayor diferencia entre las densidades poblacionales de ambas especies en aquellos nodos más cercanos de las fuentes de contaminación, en este caso para los nodos 3335 y 3362.

Para las simulaciones se usaron los vientos más frecuentes registrados en la rosa de los vientos de la ciudad de Buenaventura, ya que son los que tienen una mayor influencia en los resultados de esta investigación.

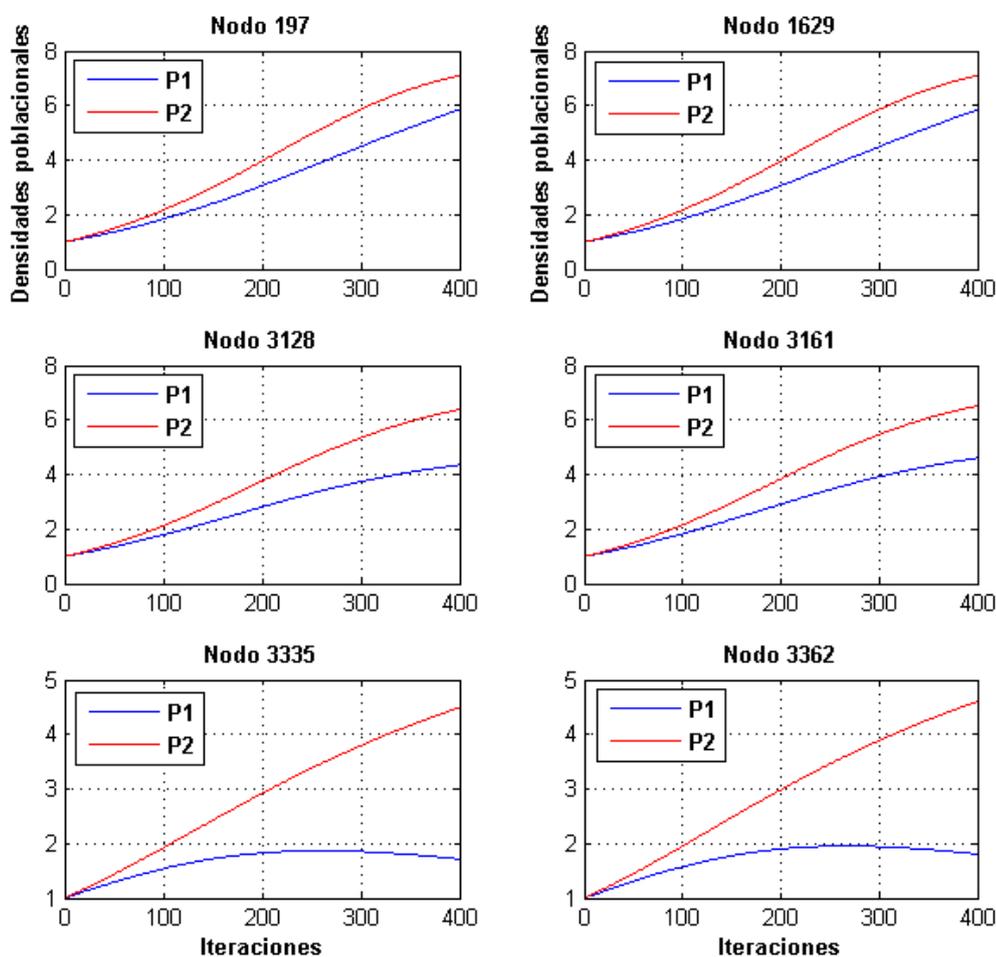


Figura 13: Monitoreo del comportamiento evolutivo de las densidades poblacionales con viento Oeste.

5. Conclusiones

Dada la situación que afronta la población P_2 en la competición con la especie P_1 , nuestro objetivo en esta investigación, señala, la necesidad de un manejo más adecuado de vertederos de aguas residuales en la bahía, dependiendo de la existencia o no de un proyecto de acervo ambiental por parte del poder público municipal.

Se proporciona una herramienta computacional para la simulación de fenómenos ecológicos y ambientales, que en la práctica podría contribuir al estudio de los efectos del impacto ambiental, donde el equilibrio de la convivencia de distintas especies puede ser desestabilizado, convirtiéndose en una competición.

La importancia de la circulación de los vientos, según el resultado obtenido de las simulaciones, es que ayuda a transportar las aguas residuales de un lugar a otro en la bahía, reduciendo así, la concentración de estas en lugares cercanos a las fuentes contaminadoras. Con esto, se reduce un poco la tasa mortandad de la especie, pero se enfatiza que la competición aún está sucediendo.

Finalmente, la observación principal, según las gráficas obtenidas en las Figuras 7, 10 y 12, ofrece una visión a largo plazo, en la cual una de las especies puede llegar hasta a la extinción, sino se tiene un manejo adecuado de los materiales impactantes.

6. Referencias

- Bassanezi, R., e Ferreira, W. Equações diferenciais com aplicações. Editora Harbra Ltda., Brasil, 1988.
- Cajas, G. D., e Meyer, J.F.C.A. Dispersão de poluentes na baía de Buenaventura: Modelagem matemática, e simulação computacional. Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2014.
- Cantrell R. S., and Cosner, C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. Wiley, 2003.
- Cunha, C. Métodos numéricos. Editora da Unicamp, 2000.
- Edelstein-Keshet, L. Mathematical models in biology, (Vol. 46). Siam, 1987.
- Marchuck, G. I. Mathematical models in environmental problems, studies in mathematics and its applications. Elsevier, North Holland, 1986.
- Meyer, J. F. C. A. Modelagem e simulação numérica do transiente térmico em meios compostos. Tese de Doutorado, Imecc - Unicamp, Campinas/SP, 1988.
- Murray, J. D. Mathematical biology. Springer, 1989
- LeVeque, R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (Vol. 98). Siam, 2007.
- Okubo, A, Levin, S. A. Diffusion and ecological problems: mathematical models. Springer, Berlin, 1980.
- Oliveira, R., e Meyer, J.F.C.A. O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na baía de Ilha Grande, RJ: modelagem, análise numérica e simulações. Tese de Doutorado, Imecc – Unicamp, 2003.
- Prestes, M., e Meyer, J.F.C.A. Dispersão de material impactante em meio aquático: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional – Lagoa do Taquaral, Campinas, SP. Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2011.

Prestes, M. e Meyer, J.F.C.A. A influência da dispersão de material impactante em meio aquático na dinâmica populacional entre duas espécies de peixes: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional – Lagoa do Taquaral – Campinas/SP. *Biomatemática*, 24:65-76, 2014.

Sossae, R. C. e Meyer, J.F.C.A. A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação. *Biomatemática*, 14:131-159, 2014.

Wolmuth, L. D., e Meyer, J.F.C.A. Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em meios aquáticos de grande extensão: o caso da represa de rio Manso. Dissertação de Mestrado, Imecc – Unicamp, 2009